ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی (۲) یازدهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را درس به درس طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر درس از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۱ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر درس، تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۱ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس در این بخش با ۳ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضی (۲) نیاز دارید، تنها در ۲۹ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار، موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ تا ۴ آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست

بارم‌بندی درس ریاضی ۲ تجربی

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
۱	۶	۲
۲	۶	۲/۵
۳	۶	۲/۵
۴	۲ نمره (تا صفحهٔ ۷۶)	۳
۵	–	۳/۵
۶	–	۳/۵
۷	–	۳
جمع	۲۰	۲۰

ردیف | # آزمـــون شمـــارۀ ۱ | نوبت اول پایۀ یازدهم دورۀ متوسطۀ دوم | نمره

فصل اول

۱ معادلات زیر را حل کنید. — ۲

الف) $\sqrt{x-۳}+\sqrt{۵x+۲}+۲=۰$

ب) $\frac{۶x}{x-۱}+\frac{x-۱}{۳x}=۳$

۲ دو فرد A و B کاری را با هم در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند؛ ولی اگر تک‌تک، این کار را انجام دهند، فرد A کار را ۱۰ ساعت زودتر از فرد B به اتمام می‌رساند. ساعت کار A و B را به دست آورید. — ۱

در این‌گونه مسائل، معمولاً دو مجهول وجود داره که باید یکی از اون‌ها رو x فرض کنید و دیگری رو هم برحسب x بنویسید، یعنی توی معادله‌ای که می‌نویسید نباید دوتا مجهول مثل x و y وجود داشته باشه، چون معادله قابل حل نیست.

۳ نسبت دو عدد مثبت برابر است با عدد طلایی، اگر عدد کوچک‌تر $(\sqrt{۵}-۱)$ باشد،عدد بزرگ‌تر را به دست آورید. — ۱

۴ خط $۲x-۵y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۱,-۴)$ مماس است. شعاع دایره، محیط و مساحت آن را به دست آورید. — ۱

۵ معادلۀ $۲x^۴-۷x^۲-۴=۰$ را به روش تغییر متغیر حل کنید. — ۱

فصل دوم

۶ درستی یا نادرستی هر قسمت را تعیین کنید، برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید. — ۱

الف) در یک مثلث دو ضلع برابرند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌روی آن‌ها برابر باشند.

ب) اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرها بر هم عمودند و برعکس.

پ) در مثلث متساوی‌الاضلاع، یک پاره‌خط نیمساز است اگر و تنها اگر میانه باشد.

ت) اگر در یک چهارضلعی، قطرها یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه بر هم عمودند.

۷ فرض کنید نقطۀ A به فاصلۀ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید. — ۱/۵

الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعدۀ آن بر خط d منطبق باشد.

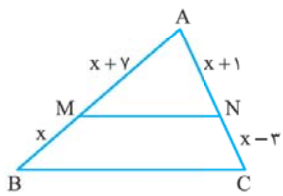
ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸\ cm^۲$ باشد.

۸ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $n^۲$ عددی زوج باشد، به کمک برهان خلف ثابت کنید که n نیز عددی زوج است. — ۱/۵

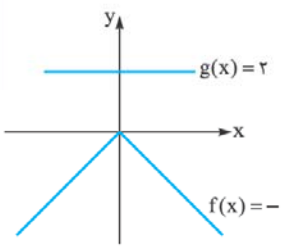
۹ در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. مقدار x و سپس طول اضلاع AC و AB را بیابید. — ۲

از قضیۀ تالس یا عکس قضیۀ تالس، حتماً حتماً در تمام امتحانات سؤال طرح می‌شه، با این‌که ساده است ولی خیلی مهمه. خلاصه، تالس رو جدی بگیرید برای خودش شخصیتی بوده‌ها.

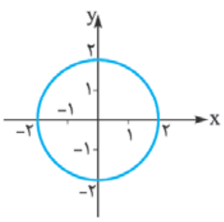


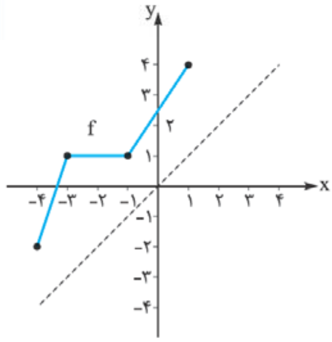
فصل سوم

۱۰ با توجه به نمودارهای f و g نمودار تابع $(f-g)(x)$ را رسم کنید. — ۱/۵



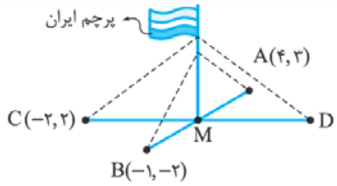
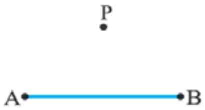
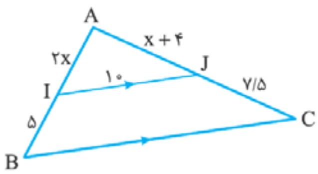
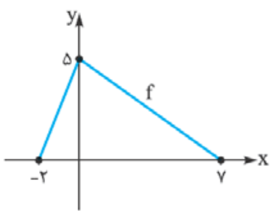
۱۱ آیا نمودار روبه‌رو، تابع است؟ چه قسمتی از دایره را انتخاب کنیم تا نمودارش یک‌به‌یک باشد؟ — ۱/۵



نمره				ردیف
	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی(۲)
نمره	نوبت اول پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم		آزمون شمارهٔ ۱	ردیف
۱	آیا توابع f و g با هم برابرند؟ چرا؟ *توجه کنید برای تساوی دو تابع، فقط تساوی فرمول‌های آن‌ها کافی نیست بقیه‌شو نمی‌گم که جواب، لو نره.* $f(x)=\begin{cases}\frac{-۱}{۳} & x>۰\\ \frac{۱}{۳} & x<۰\end{cases}\ ,\ g(x)=\frac{\lvert x\rvert}{-۳x}$			۱۲
۱/۵	نمودار وارون تابع مقابل را رسم کنید. آیا نموداری که رسم می‌کنید خودش تابع است؟ آیا نمودار f یک‌به‌یک است؟ 			۱۳

فصل چهارم

۱	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $A=۲\cos(-۴۵^\circ)\times\tan۱۲۰^\circ+\cot۲۴۰^\circ\times\sin(-۲۲۵^\circ)$	۱۴
۰/۵	بدون رسم نمودار مشخص کنید آیا نمودار دو تابع $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ و $y=-\cos(۴\pi-x)$ بر هم منطبق هستند یا خیر؟	۱۵
۱	الف) نمودار $y=۲\cos x-۱$ را در یک بازهٔ دلخواه به طول ۲π رسم کنید. ب) اگر $\tan\alpha=۳$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل $\sin(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha)$ را به دست آورید.	۱۶
۲۰ جمع نمرات	موفق باشید	

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره
۱	یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل، توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری‌که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ D را به دست آورید. 	۰/۷۵
۲	مربع ABCD در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات قرار دارد (هر چهار رأس آن) به طوری‌که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند: الف) شیب ضلع AB را به دست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید. ب) شیب ضلع AD را حساب کرده و معادلهٔ آن را بنویسید. پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.	۱/۲۵
۳	پاره‌خط AB و نقطهٔ P به گونه‌ای قرار دارند که P از دو سر AB به یک فاصله است. نشان دهید P روی عمودمنصف AB قرار دارد. 	۱
۴	در شکل مقابل $IJ \parallel BC$ است. مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI، AJ و BC را به دست آورید. 	۱/۵
۵	اگر $f=\{(۳,۸),(۷,۱۰),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۱,۳),(۳,-۶),(۵,۱۸)\}$ باشند، آن‌گاه توابع $f+g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.	۱
۶	اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید. الف) $-f(x)$ ب) $\frac{۱}{۲}f(x)$ پ) $f(x-۱)+۲$ 	۱/۲۵
۷	بدون استفاده از ماشین‌حساب، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید. الف) $\cos ۸۴۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$ ب) $\tan(-۳۲۴^\circ) = \tan ۳۶^\circ$	۲
۸	درستی یا نادرستی تساوی مقابل را بررسی کنید. $\tan(\alpha - \frac{۱۳\pi}{۲}) = -\cot(۷\pi - \alpha)$	۱
۹	اگر $f(x)=۵^x$ باشد، نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید. سپس مقدار $f^{-۱}(\frac{۱}{۱۲۵})$ را به دست آورید.	۱
۱۰	مقدار $\log_۲ ۱۳$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ به کدام‌یک نزدیک‌تر است؟	۰/۵
۱۱	اگر $\log a = ۱۸$، $\log b = ۱۲$ و $\log c = ۱۲۵$ باشند، حاصل $\log(\sqrt[۳]{a}\,.\,\sqrt[۴]{b}\,.\,\sqrt[۵]{c})$ را به دست آورید.	۱
۱۲	مقدار x را در معادلهٔ $\log_x(x^۲+x)=\log_x(۷x-۵)$ به دست آورید.	۱
۱۳	مقدار a را طوری بیابید که در تابع $f(x)=(x+a)[x]$ داشته باشیم: $\lim_{x\to ۴^+} f(x) = ۵ + \lim_{x\to ۴^-} f(x)$	۰/۷۵
۱۴	الف) حاصل حد مقابل را به دست آورید. $\lim_{x\to -۱} \frac{x^۳+۳x+۴}{۲x^۲-۲} = ?$ ب) تابع $f(x)=\begin{cases} -۴[x]+b & x>-۳ \\ ۲x+۸ & x=-۳ \\ ax+b & x<-۳ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که f در نقطهٔ $x=-۳$ حد داشته باشد.	۱/۵

ردیف	آزمون شماره ۹	نوبت دوم پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره
۱۵	با رسم نمودار تابع f پیوستگی آن را در $x=۲$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۶ & x=۲\end{cases}$		۱
۱۶	نمودار توابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $g(x)=[x]$ با دامنهٔ $[-۲,۲]$ را رسم کرده و بگویید در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته هستند؟		۱
۱۷	یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای A و B را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: پیشامد A: شماره‌های ظاهرشده با هم برابر باشند. پیشامد B: مجموع شماره‌های ظاهرشده ۸ باشد. الف) $P(A)$ و $P(B)$ را به دست آورید. ب) آیا پیشامدهای A و B مستقل‌اند؟ پ) اگر پیشامد B اتفاق بیفتد، احتمال این‌که پیشامد A هم اتفاق بیفتد، چه‌قدر است؟		۱
۱۸	احتمال قبولی در کنکور سراسری تجربی برابر ۰/۲ است و احتمال این‌که فردی که قبول می‌شود پزشک شود، ۰/۱۴ است. اگر فردی در کنکور تجربی قبول شود، با چه احتمالی پزشک خواهد شد؟		۱
۱۹	کارخانه‌ای دو نوع لاستیک A و B تولید می‌کند که میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۲۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای A و B به ترتیب برابر ۱۲۰۰ و ۴۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟		۰/۵
۲۰	میانگین ۱۰ دادهٔ آماری ۳۲/۵ است. دو دادهٔ ۲۰ و ۳۰ را از این داده‌ها کنار می‌گذاریم. میانگین جدید را به دست آورید.		۰/۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف) $\underbrace{\sqrt{x-۳}}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{\sqrt{۵x+۲}}_{\text{نامنفی}}+\underset{\text{مثبت}}{\underset{\downarrow}{۲}}=۰$

جمع دو عبارت نامنفی و یک عدد مثبت، هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر صفر شود، پس این معادله جواب ندارد.

ب) $\frac{۶x}{x-۱}+\frac{x-۱}{۳x}=۳$

$$\xrightarrow[۳x(x-۱)]{\text{ضرب تمام جملات در}} ۶x(۳x)+(x-۱)(x-۱)=۳(۳x)(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۱۸x^۲+x^۲-۲x+۱=۹x^۲-۹x \Rightarrow ۱۰x^۲+۷x+۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۷^۲-۴(۱۰)(۱)=۹ \Rightarrow x=\frac{-۷\pm\sqrt{۹}}{۲۰}=\frac{-۷\pm۳}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{-۷+۳}{۲۰}=\frac{-۱}{۵} \\ x''=\frac{-۷-۳}{۲۰}=\frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل‌قبول‌اند، چون هیچ مخرجی را صفر نمی‌کنند.

۲- اگر زمان فرد A را x در نظر بگیریم، زمان فرد B برابر $(x+۱۰)$ خواهد بود، لذا:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۰}=\frac{۱}{۱۲} \xrightarrow{\text{ضرب جملات در } ۱۲x(x+۱۰)}$$

$$۱۲(x+۱۰)+۱۲x=x(x+۱۰) \Rightarrow ۱۲x+۱۲۰+۱۲x=x^۲+۱۰x$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^۲-۱۴x-۱۲۰}_{\text{تجزیه}}=۰ \Rightarrow (x-۲۰)(x+۶)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲۰=۰ \Rightarrow x=۲۰ & (\text{ق ق}) \\ x+۶=۰ \Rightarrow x=-۶ & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

پس زمان شخص B هم برابر است با: $x+۱۰=۲۰+۱۰=۳۰$ (ساعت)

تذکر: در ابتدای حل مسئله، می‌توانستید زمان فرد B را x و زمان فرد A را $(x-۱۰)$ فرض کنید.

۳- اگر عدد بزرگ‌تر را x و عدد کوچک‌تر را y بنامیم، با توجه به متن سؤال، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۵}-۱}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۲x=(\sqrt{۵}-۱)(\sqrt{۵}+۱) \Rightarrow ۲x=(\sqrt{۵})^۲-۱^۲$$

$$\Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲$$

۴- فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، همان شعاع دایره است، لذا:

$$۲x-۵y=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=-۵ \\ c=۰ \end{cases},\ W(\underset{x_۱}{\underset{\downarrow}{۱}},\underset{y_۱}{\underset{\downarrow}{-۴}})$$

$$\text{شعاع}=r=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲(۱)+(-۵)(-۴)+۰|}{\sqrt{۲^۲+(-۵)^۲}}=\frac{۲۲}{\sqrt{۲۹}}$$

$$\text{محیط دایره}=۲\pi r=۲\pi\times(\frac{۲۲}{\sqrt{۲۹}})=\frac{۴۴\pi}{\sqrt{۲۹}}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi r^۲=\pi(\frac{۲۲}{\sqrt{۲۹}})^۲=\frac{۴۸۴\pi}{۲۹}$$

۵- $۲x^۴-۷x^۲-۴=۰ \xrightarrow{x^۲=t} ۲t^۲-۷t-۴=۰$

$$\Delta=۴۹+۳۲=۸۱ \Rightarrow t=\frac{۷\pm\sqrt{۸۱}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۷+۹}{۴}=۴ \\ t=\frac{۷-۹}{۴}=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=۴ \Rightarrow x^۲=۴ \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm۲ \\ t=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

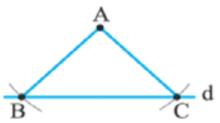
۶- الف) درست است.

ب) نادرست است؛ چون مثلاً مستطیل، نوعی متوازی‌الاضلاع است ولی قطرهای آن بر هم عمود نیستند.

پ) درست است.

ت) نادرست است؛ مثلاً در متوازی‌الاضلاع مقابل، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، ولی بر هم عمود نیستند.

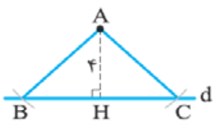
۷- الف) کافی است به مرکز A و شعاعی که اندازه‌اش بیشتر از فاصلهٔ A تا d باشد کمانی بزنیم تا خط d را در ۲ نقطه به نام‌های B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقین ABC به دست می‌آید.



مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow$ $AB=AC=$ شعاع دایره

ب) کافی است کمانی به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر بزنیم تا خط d را در نقاطی مثل M و N قطع کند؛ مثلث AMN متساوی‌الساقین بوده و طول ساق‌های آن ۶ سانتی‌متر است.

پ) طبق شکل، AH ارتفاع وارد بر قاعده است و داریم:



$$\text{مساحت } S=\frac{BC\times AH}{۲}=۸ \Rightarrow \frac{BC\times۴}{۲}=۸ \Rightarrow BC=۴$$

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر وتر، میانه هم هست لذا: $BH=HC=۲$ بنابراین:

$$\text{فیثاغورس:}\ AC^۲=AH^۲+HC^۲ \Rightarrow AC^۲=۴^۲+۲^۲=۲۰$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} AC=\sqrt{۲۰}=\sqrt{۴\times۵}=۲\sqrt{۵}$$

پس باید به مرکز A و شعاع $۲\sqrt{۵}$ کمان بزنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند، مثلث ABC جواب است.

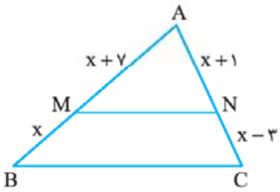
۸- فرض می‌کنیم n فرد باشد (فرض خُلف) لذا خواهیم نوشت:

$$n=۲k+۱ \Rightarrow n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱$$

$$=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{m})+۱=۲m+۱$$

m هر عدد صحیحی که باشد، حاصل $۲m+۱$ عددی فرد می‌شود؛ پس به تناقض رسیده‌ایم، چون در متن سؤال، گفته شده $n^۲$ زوج است؛ لذا فرض خُلف نادرست بوده و n زوج است.

-۹



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۷}{x} = \frac{x+۱}{x-۳}$$

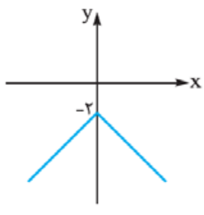
$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} (x+۷)(x-۳) = x(x+۱)$$

$$\Rightarrow \cancel{x^۲} + ۴x - ۲۱ = \cancel{x^۲} + x \Rightarrow ۳x = ۲۱ \Rightarrow x = ۷$$

$$AB = x + ۷ + x = ۷ + ۷ + ۷ = ۲۱$$

$$AC = x + ۱ + x - ۳ = ۷ + ۱ + ۷ - ۳ = ۱۲$$

-۱۰



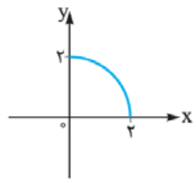
$y = -|x| - ۲$

$$(D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}) \Rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = -|x| - ۲$$

۱۱- خیر، تابع نیست؛ چون می‌توان خطی عمودی (موازی محور yها) رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.

اگر هر یک از ربع دایره‌ها را انتخاب کنیم، تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر ایجاد می‌شود، مانند:



$\Rightarrow$ دامنه $= [۰, ۲]$

-۱۲

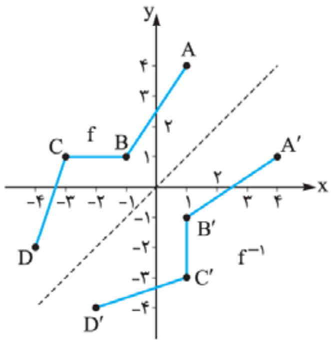
$$D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \ , \ D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$g(x) = \frac{|x|}{-۳x} = \begin{cases} \dfrac{x}{-۳x} & x > ۰ \\ \dfrac{-x}{-۳x} & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \dfrac{-۱}{۳} & x > ۰ \\ \dfrac{۱}{۳} & x < ۰ \end{cases}$$

پس هم دامنه‌ها و هم ضابطه‌های f و g مساوی شدند؛ لذا: $f(x) = g(x)$

۱۳- کافی است قرینهٔ نقاط مهم شکل (A، B، C و D) را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و آن‌ها را با خطوط راست به هم وصل کنیم، مثلاً $A(۱,۴) \Rightarrow A'(۴,۱)$

ضمناً $f^{-۱}$ تابع نیست چون f یک‌به‌یک نیست.



-۱۴

$$\cos(-۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۲۰^\circ = \tan(\underbrace{۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ}_{\text{ربع دوم}}) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

$$\cot ۲۴۰^\circ = \cot(\underbrace{۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ}_{\text{ربع سوم}}) = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin(-۲۲۵^\circ) = -\sin ۲۲۵^\circ = -\sin(\underbrace{۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ}_{\text{ربع سوم}}) = -(-\sin ۴۵^\circ) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow A = ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times (-\sqrt{۳}) + \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\sqrt{۶} + \frac{\sqrt{۶}}{۶} = \frac{-۵\sqrt{۶}}{۶}$$

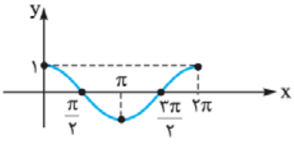
-۱۵

$$y = \sin(x - \frac{\pi}{۲}) = -\sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲} - x}_{\text{ربع اول}}) = -\cos x$$

$$y = -\cos(\underbrace{۴\pi - x}_{\text{ربع چهارم}}) = -\cos x$$

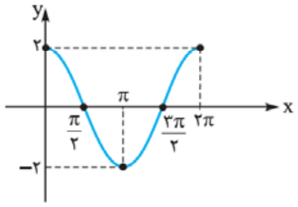
ضابطه‌های دو تابع با هم برابر شدند، دامنه‌هایشان هم که هر دو برابر $\mathbb{R}$ است، پس نمودارهایشان نیز بر هم منطبق است.

۱۶- الف)



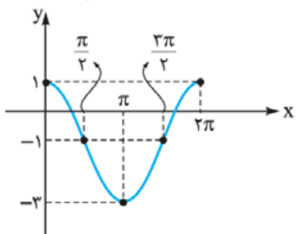
$y = \cos x$

$\xrightarrow{\text{۲× عرض نقاط}}$



$y = ۲\cos x$

$\xrightarrow{\text{۱ واحد به پایین}}$



$y = ۲\cos x - ۱$

ب) $\sin(\frac{۵\pi}{۲} - \alpha) = \sin(۲\pi + (\frac{\pi}{۲} - \alpha)) = \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + ۳^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}$$

$$\xrightarrow{\text{انتهای } \alpha \text{ در ربع سوم است}} \cos\alpha = -\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- M وسط AB است، لذا:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} = \dfrac{۴-۱}{۲} = \dfrac{۳}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} = \dfrac{۳-۲}{۲} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow M(\tfrac{۳}{۲},\tfrac{۱}{۲})$$

از طرفی M وسط CD نیز هست، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_C + x_D}{۲} \Rightarrow \dfrac{۳}{\cancel{۲}} = \dfrac{-۲+x_D}{\cancel{۲}} \Rightarrow x_D = ۵ \\ y_M = \dfrac{y_C + y_D}{۲} \Rightarrow \dfrac{۱}{\cancel{۲}} = \dfrac{۲+y_D}{\cancel{۲}} \Rightarrow y_D = -۱ \end{cases} \Rightarrow D(۵,-۱)$$

۲- الف) $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{۴-۱}{۱۰-۵} = \dfrac{۳}{۵}$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y-۱ = \frac{۳}{۵}(x-۵) \Rightarrow y = \frac{۳}{۵}x - ۲$$

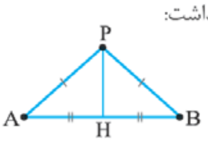
ب) اضلاع AB و AD بر هم عمودند، پس شیب آن‌ها عکس و قرینهٔ یکدیگر است؛ لذا شیب AD برابر $\frac{-۵}{۳}$ و معادلهٔ آن برابر است با:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y-۱ = \frac{-۵}{۳}(x-۵) \Rightarrow y = \frac{-۵}{۳}x + \frac{۲۸}{۳}$$

پ) رأس‌های A و C روبه‌روی هم و رأس‌های B و D هم روبه‌روی هم هستند، لذا:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow ۵+۷ = ۱۰ + x_D \Rightarrow x_D = ۲ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow ۱+۹ = ۴ + y_D \Rightarrow y_D = ۶ \end{cases} \Rightarrow D(۲,۶)$$

۳- P را به A، B و هم‌چنین وسط AB وصل می‌کنیم (فعلاً نمی‌دانیم PH بر AB عمود است یا خیر) در مثلث‌های $\overset{\Delta}{APH}$ و $\overset{\Delta}{PHB}$ خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{l} AP = PB \\ PH = PH \text{ ضلع مشترک} \\ AH = HB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{APH} \cong \overset{\Delta}{PHB}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \begin{cases} A\hat{P}H = H\hat{P}B \\ A\hat{H}P = P\hat{H}B \\ P\hat{A}H = P\hat{B}H \end{cases}$$

ولی چون جمع دو زاویهٔ $A\hat{H}P$ و $P\hat{H}B$ برابر ۱۸۰° است لذا:

$A\hat{H}P = P\hat{H}B = ۹۰^\circ$

یعنی ثابت کردیم PH بر AB عمود نیز هست.

۴- $IJ \parallel BC \xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{تالس}} \dfrac{AI}{IB} = \dfrac{AJ}{JC}$

$$\Rightarrow \frac{۲x}{۵} = \frac{x+۴}{۷/۵} \Rightarrow ۱۵x = ۵x + ۲۰ \Rightarrow ۱۰x = ۲۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$IJ \parallel BC \xrightarrow[\text{جزء به کل}]{\text{تالس}} \frac{AI}{AB} = \frac{IJ}{BC} \Rightarrow \frac{۲x}{۲x+۵} = \frac{۱۰}{BC}$$

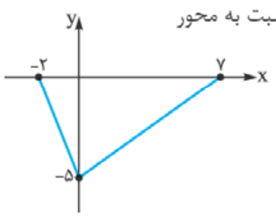
$$\Rightarrow \frac{۲(۲)}{۲(۲)+۵} = \frac{۱۰}{BC} \Rightarrow ۴BC = ۹۰ \Rightarrow BC = \frac{۹۰}{۴} = ۲۲/۵$$

$$AI = ۲x = ۲(۲) = ۴ \ , \ AJ = x+۴ = ۲+۴ = ۶$$

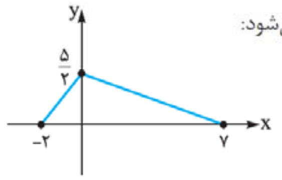
۵- $f+g = \{(۳,۸-۶),(۵,۲+۱۸)\} = \{(۳,۲),(۵,۲۰)\}$

$$\frac{f}{g} = \{(۳,\frac{۸}{-۶}),(۵,\frac{۲}{۱۸})\} = \{(۳,-\frac{۴}{۳}),(۵,\frac{۱}{۹})\}$$

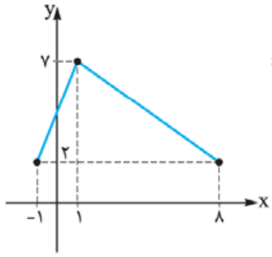
۶- الف) برای رسم $-f(x)$ باید نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم:



ب) برای رسم $\frac{1}{2}f(x)$ عرض نقاط $f(x)$ نصف می‌شود:



پ) برای رسم $f(x-1)+2$ ابتدا نمودار $f(x)$ را ۱ واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۷- الف) $\cos 840^\circ = \cos(\underbrace{5\times180^\circ - 60^\circ}_{\text{ربع دوم}}) = -\cos 60^\circ$

پس رابطهٔ داده‌شده، نادرست است.

ب) $\tan(-324^\circ) = -\tan 324^\circ = -\tan(\underbrace{360^\circ - 36^\circ}_{\text{ربع چهارم}})$

$= -(-\tan 36^\circ) = \tan 36^\circ$

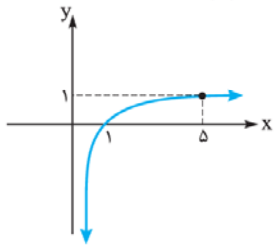
پس رابطهٔ داده‌شده، صحیح است.

۸- سمت چپ: $\tan(\alpha - \frac{13\pi}{2}) = -\tan(\underbrace{13\frac{\pi}{2} - \alpha}_{\text{ربع اول}}) = -\cot\alpha$

سمت راست: $-\cot(\underbrace{7\pi - \alpha}_{\text{ربع دوم}}) = \cot\alpha$

پس رابطهٔ داده‌شده نادرست است.

۹- معکوس تابع $f(x) = 5^x$ برابر است با $f^{-1}(x) = \log_5 x$ لذا:



$y = \log_5 x$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_y = (0, +\infty) \\ R_y = \mathbb{R} \end{cases}$$

البته روش دیگر این بود که ابتدا نمودار $y = 5^x$ را رسم کنید، سپس نمودار آن را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنید.

$$f^{-1}(\frac{1}{125}) = \log_5 \frac{1}{125} = \log_5 \frac{1}{5^3} = \log_5 5^{-3} = -3\log_5 5 = -3\times1 = -3$$

۱۰- $2^3 < 13 < 2^4 \xrightarrow[\text{مبنای ۲ می‌گیریم}]{\text{از همهٔ اعداد، لگاریتم در}} \log_2 2^3 < \log_2 13 < \log_2 2^4$

$\Rightarrow 3\log_2 2 < \log_2 13 < 4\log_2 2 \Rightarrow 3 < \log_2 13 < 4$

پس حاصل $\log_2 13$ عددی است بین ۳ و ۴. هم‌چنین به عدد ۴ نزدیک‌تر است.

۱۱- $\log(\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[4]{b}\,.\,\sqrt[5]{c}) = \log\sqrt[3]{a} + \log\sqrt[4]{b} + \log\sqrt[5]{c}$

$= \log a^{\frac{1}{3}} + \log b^{\frac{1}{4}} + \log c^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}\log a + \frac{1}{4}\log b + \frac{1}{5}\log c$

$= \frac{1}{3}\times18 + \frac{1}{4}\times12 + \frac{1}{5}\times125 = 6 + 3 + 25 = 34$

۱۲- $\log_x(x^2 + x) = \log_x(7x - 5) \Rightarrow x^2 + x = 7x - 5$

$\Rightarrow x^2 + x - 7x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & (\text{ق ق}) \\ x = 1 & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$

عدد ۱ به این علت رد می‌شود که با جای‌گذاری آن در معادلهٔ اصلی، مبنای لگاریتم‌ها ۱ می‌شود. (می‌دانید که مبنا همیشه عددی مثبت و مخالف ۱ است.)

۱۳-

$\lim_{x\to4^+} f(x) = (4+a)[4^+] = (4+a)\times4 = 16 + 4a$

$\lim_{x\to4^-} f(x) = (4+a)[4^-] = (4+a)\times3 = 12 + 3a$

طبق فرض:

$\lim_{x\to4^+} f(x) = 5 + \lim_{x\to4^-} f(x) \Rightarrow 16 + 4a = 5 + 12 + 3a \Rightarrow a = 1$

۱۴- الف) $\lim_{x\to-1} \frac{x^3 + 3x + 4}{2x^2 - 2} = \frac{0}{0}$

$\xrightarrow[\text{در مخرج هم فاکتورگیری می‌کنیم}]{\text{صورت را بر x+1 تقسیم می‌کنیم}} \lim_{x\to-1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 4)}{2(x-1)\cancel{(x+1)}}$

$= \frac{(-1)^2 - (-1) + 4}{2(-1-1)} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$

ب) باید داشته باشیم: $\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-} f(x)$

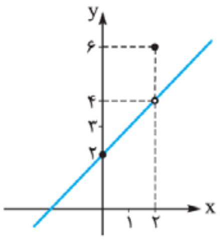
$\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = \lim_{x\to(-3)^+}(-4[x] + b) = -4\underbrace{[(-3)^+]}_{-3} + b = 12 + b$

$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-}(ax + b) = -3a + b \Rightarrow 12 + \cancel{b} = -3a + \cancel{b} \Rightarrow a = -4$

پس b می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواه باشد (چون از دو طرف تساوی ساده شد).

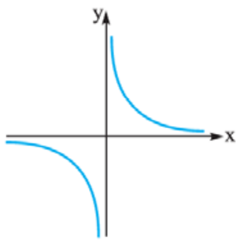
۱۵- $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = x + 2 & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$

x	0	1
y	2	3



نمودار تابع در $x = 2$ دارای سوراخ‌شدگی (نقطهٔ توخالی) است، پس ناپیوسته است. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت حد چپ و راست با هم برابرند (برابر ۴) ولی مقدار تابع در $x = 2$ برابر ۶ است.

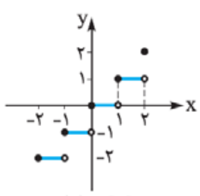
۱۶-



$f(x) = \frac{1}{x}$

f در نقطهٔ $x = 0$ ناپیوسته است و در بقیهٔ نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

حال تابع g را رسم می‌کنیم:



$g(x) = [x]$

تابع g در نقاط به طول ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۲ ناپیوسته است و در بقیهٔ نقاط دامنه‌اش پیوسته می‌باشد.

۱۷- الف) $n(S)=6\times 6=36$

A: دو عدد با هم برابر باشند $\Rightarrow A=\{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$

$\Rightarrow n(A)=6 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

B: مجموع دو عدد ۸ باشد $\Rightarrow B=\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$

$\Rightarrow P(B)=\frac{5}{36}$

ب) $A\cap B=\{(4,4)\} \Rightarrow n(A\cap B)=1 \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

$P(A)\times P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{36}\neq P(A\cap B)$

پس A و B مستقل نیستند.

پ) $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}$

۱۸- $\begin{cases} A: \text{پیشامد قبولی در کنکور تجربی} \\ B: \text{پیشامد قبولی در رشتهٔ پزشکی} \end{cases}$

$P(A)=0/2,\ P(B)=0/14$

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0/14}{0/20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}=0/7$

۱۹- برای لاستیک A: $C.V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{1200}{12000}=\frac{1}{10}$

برای لاستیک B: $C.V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{4000}{20000}=\frac{1}{5}$

پس C.V برای لاستیک A کم‌تر است لذا کیفیت لاستیک A بهتر است.

۲۰- $\bar{x}=\frac{\text{مجموع اولیه}}{\text{تعداد اولیه}} \Rightarrow 32/5=\frac{\text{مجموع اولیه}}{10}$

$\Rightarrow$ مجموع اولیه $=32/5\times 10=325$

مجموع جدید $=325-20-30=275$

$\Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{\text{مجموع جدید}}{\text{تعداد جدید}}=\frac{275}{8}=34/375$

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: هندسهٔ تحلیلی و جبر

درس اول: هندسهٔ تحلیلی

خط

تعریف شیب خط: شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی.

شیب خطی که از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$\boxed{m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}}$$

معادلهٔ خط

معادلهٔ خطی که شیب آن m بوده و از نقطه‌ای مثل $A(x_۱,y_۱)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$\boxed{y-y_۱=m(x-x_۱)}$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از $A(۰,-۱)$ و $B(۴,۲)$ عبور کند.

حل:

$$(A(\underset{x_۱}{۰},\underset{y_۱}{-۱}),B(\underset{x_۲}{۴},\underset{y_۲}{۲}))\Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲-(-۱)}{۴-۰}=\frac{۳}{۴}$$

$$y-y_۱=m\Rightarrow m(x-x_۱)\Rightarrow y-(-۱)=\frac{۳}{۴}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x-۱$$

رسم نمودار خط

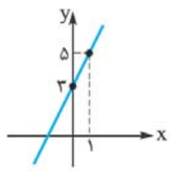
برای رسم نمودار یک خط بهتر است ابتدا معادلهٔ خط را به شکل استاندارد یعنی $y=mx+n$ تبدیل کنیم، سپس به x دو عدد دلخواه ولی مناسب نسبت دهیم و y این دو x را به دست آوریم. حال دو نقطهٔ به دست آمده را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم. ضمناً m شیب و n عرض از مبدأ خط می‌باشد (عرض از مبدأ، محل برخورد نمودار با محور yها می‌باشد.)

مثال: نمودار خط $۲y-۴x=۶$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

حل:

$$۲y=۴x+۶\xrightarrow{\div ۲}y=۲x+۳$$

x	۰	۱
y	۳	۵



$\Rightarrow$ نمودار از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

خطوط موازی و عمود

اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌های مساوی دارند، ولی اگر عمود باشند، شیب یکی از آن‌ها، عکس و قرینهٔ دیگری است یعنی حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها (-۱) است:

$$\boxed{m\times m'=-۱}$$

تذکر: خطوط به معادلهٔ $x=a$ و $y=b$ همواره بر هم عمودند. $(a,b\in\mathbb{R})$

مثلاً دو خط $x=-۱$ و $y=\sqrt{۲}$ بر هم عمودند.

مثال: مقدار k را طوری به دست آورید که دو خط $۲y+۱=x$ و $(k-۱)y=۳x-۲$ بر هم عمود باشند.

حل:

$$۲y=x-۱\xrightarrow{\div ۲}y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

$$(k-۱)y=۳x-۲\xrightarrow{\div (k-۱)}y=\frac{۳}{k-۱}x-\frac{۲}{k-۱}$$

$$\Rightarrow m'=\frac{۳}{k-۱},\ m\times m'=-۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{k-۱}=-۱\Rightarrow\frac{۳}{۲k-۲}=-۱$$

$$\Rightarrow -۲k+۲=۳\Rightarrow -۲k=۱\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

مثال: عرض از مبدأ خطی که از نقطهٔ $A(۳,۴)$ گذشته و با خط $x-y=۴$ موازی باشد را به دست آورید.

حل:

خط $x-y=۴\Rightarrow -y=-x+۴\xrightarrow{\div(-۱)}y=x-۴\Rightarrow m=۱$

مطلوب ما باید با خط داده‌شده موازی باشد، پس شیب آن ۱ است؛ لذا:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۴=۱\times(x-۳)\Rightarrow y=x+۱$$

$\Rightarrow$ عرض از مبدأ $=۱$

نقطه در دستگاه مختصات

فاصلهٔ بین دو نقطه

اگر دو نقطهٔ A و B هم‌عرض باشند، آن‌گاه: $\boxed{AB=|x_A-x_B|}$

اگر دو نقطهٔ C و D هم‌طول باشند، آن‌گاه: $\boxed{CD=|y_C-y_D|}$

مثال: الف) فاصلهٔ نقاط $A(۵,۴)$ و $B(-۶,۴)$ را به دست آورید.

ب) فاصلهٔ نقاط $C(۳,۹)$ و $D(۳,-۵)$ را به دست آورید.

حل: الف) A و B هم‌عرض هستند، لذا:

$$AB=|x_A-x_B|=|۵-(-۶)|=۱۱$$

ب) C و D هم‌طول هستند، لذا:

$$CD=|y_C-y_D|=|۹-(-۵)|=۱۴$$

در حالت کلی اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه از صفحهٔ مختصات باشند فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر (طول پاره‌خط AB) برابر است با:

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}}$$

مختصات وسط پاره‌خط

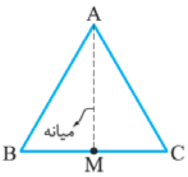
اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ مختصات دو سر پاره‌خطی باشند، مختصات نقطهٔ M وسط AB عبارت است از:

$$\boxed{x_M=\frac{x_A+x_B}{۲},\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}}$$

تذکر: نقاط A و B نسبت به نقطهٔ M (وسط A و B) قرینه هستند.

مثال: اگر $A(۱,۲)$، $B(-۴,۴)$ و $C(۰,-۸)$ سه رأس مثلثی باشند، اندازهٔ میانهٔ AM را به دست آورید. (M وسط BC است.)

حل: M وسط BC است، لذا:



(شکل فرضی است.)

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{-۴+۰}{۲}=-۲\\ y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۴+(-۸)}{۲}=-۲\end{cases}\qquad A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.,\ M\left|\begin{matrix}-۲\\-۲\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

$$=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,-۲)$ را نسبت به $M(۰,۴)$ به دست آورید.

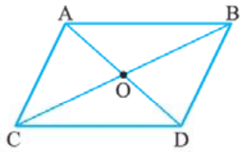
حل: اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به M را B بنامیم، M در واقع، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB است لذا خواهیم نوشت:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow ۰=\frac{۳+x_B}{۲}\Rightarrow ۳+x_B=۰\Rightarrow x_B=-۳$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{-۲+y_B}{۲}\Rightarrow -۲+y_B=۸$$

$$\Rightarrow y_B=۱۰\Rightarrow B(-۳,۱۰)$$

یک خاصیت مهم از متوازی‌الاضلاع:



در هر متوازی‌الاضلاع، مانند شکل مقابل، بین مختصات ۴ رأس، روابط زیر برقرار است (مربع، مستطیل و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع هستند).

$$\begin{cases}x_A+x_D=x_B+x_C\\ y_A+y_D=y_B+y_C\end{cases}$$

اثبات: می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، لذا:

$$(x_O=\frac{x_A+x_D}{۲},x_O=\frac{x_B+x_C}{۲})\Rightarrow\frac{x_A+x_D}{۲}=\frac{x_B+x_C}{۲}$$

$$\Rightarrow\boxed{x_A+x_D=x_B+x_C}$$

$$(y_O=\frac{y_A+y_D}{۲},y_O=\frac{y_B+y_C}{۲})\Rightarrow\frac{y_A+y_D}{۲}=\frac{y_B+y_C}{۲}$$

$$\Rightarrow\boxed{y_A+y_D=y_B+y_C}$$

یعنی همیشه **جمع مختصات دو رأس مقابل برابر است با جمع مختصات دو رأس مقابل دیگر.**

مثال: نقاط $A(۱,۴)$، $B(۵,-۲)$ و $C(۰,۶)$ سه رأس متوالی یک لوزی هستند. مختصات رأس چهارم لوزی را به دست آورید.

حل:

$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۱+۰=۵+x_D\Rightarrow x_D=-۴$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow ۴+۶=-۲+y_D$$

$$\Rightarrow y_D=۱۲\Rightarrow D(-۴,۱۲)$$

فاصلهٔ نقطه از خط

منظور از فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ تا خط $d:ax+by+c=۰$ طول پاره‌خطی است که از A عمود بر خط d رسم می‌شود.

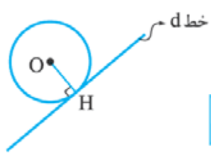
$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

به عنوان مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۴)$ تا خط نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y=x\Rightarrow -x+y=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=۱\\ c=۰\end{cases},\ A(\underset{x_1}{۳},\underset{y_1}{۴})$$

$$AH=\frac{|(-۱)(۳)+(۱)(۴)+۰|}{\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲}}=\frac{|-۳+۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نکته: اگر خطی بر یک دایره مماس باشد (دایره را در یک نقطه قطع کند)، فاصلهٔ مرکز دایره تا این خط، همان شعاع دایره است؛ چون خط مماس، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است.



$$\boxed{\text{فاصلهٔ O تا خط}\ d=OH=\text{شعاع دایره}}$$

مثال: خط $۴x-۲y=۱$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۳,-۶)$ مماس است. شعاع دایره را به دست آورید.

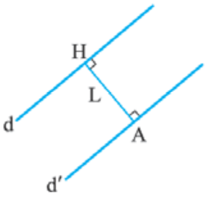
حل:

$$۴x-۲y-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=-۲\\ c=-۱\end{cases},\ O(\underset{x_1}{۳},\underset{y_1}{-۶})$$

$$\text{شعاع}=OH=\frac{|۴(۳)+(-۲)(-۶)+(-۱)|}{\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۲۳}{\sqrt{۲۰}}$$

فاصلهٔ بین دو خط موازی

دو خط $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ با هم موازی‌اند و فاصلهٔ بین آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:



$$L=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

اثبات: کافی است فاصلهٔ یک نقطه روی یکی از دو خط را تا خط دیگر به دست آوریم، مثلاً ما به دلخواه فاصلهٔ $A(x_1,y_1)$ را تا خط d به دست می‌آوریم:

$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\quad(۱)$$

از طرفی نقطهٔ A روی خط d' قرار دارد؛ پس می‌توانیم مختصاتش را در معادلهٔ این خط قرار دهیم.

$$ax+by+c'=۰\xrightarrow{A(x_1,y_1)\in d'}ax_1+by_1+c'=۰$$

$$\Rightarrow ax_1+by_1=-c'\quad(۲)$$

حال مقدار ax_1+by_1 از رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$AH=\frac{|-c'+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال: فاصلهٔ دو خط $x-۲y=۴$ و $۳x-۶y=۱۰$ را به دست آورید.

حل: اگر معادلهٔ $x-۲y=۴$ را در ۳ ضرب کنیم به معادلهٔ $۳x-۶y=۱۲$ می‌رسیم، با مقایسهٔ این معادله و معادلهٔ خط دیگر یعنی $۳x-۶y=۱۰$ متوجه می‌شویم که دو خط موازی‌اند؛ زیرا ضرایب x و y آن‌ها با هم مساوی است.

$$۳x-۶y\underset{c}{\underbrace{-۱۲}}=۰\ ,\ ۳x-۶y\underset{c'}{\underbrace{-۱۰}}=۰$$

$$L=\frac{|(-۱۲)-(-۱۰)|}{\sqrt{۳^۲+(-۶)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۴۵}}$$

درس دوم: تابع درجه دوم و معادلهٔ درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادلات

گاهی اوقات، یک عبارت و توانی از آن عبارت در معادله دیده می‌شود که بهتر است آن عبارت را مثلاً t فرض کرده تا آن معادله، به یک معادلهٔ درجه‌دوم ساده تبدیل شود؛ سپس آن معادله را حل کرده تا t به دست آید. در نهایت به جای t، عبارت اولیه را قرار می‌دهیم.

مثال: معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

الف) $x^۴-۵x^۲-۶=۰$

ب) $(x-۱)^۲+۲\sqrt{۳}(x-۱)=۶$

حل: الف) $x^۴$ را می‌توان به شکل $(x^۲)^۲$ نوشت، پس $x^۲$ و توان دوم $x^۲$ در معادله دیده می‌شوند لذا نام $x^۲$ را t در نظر می‌گیریم:

$$t^۲-۵t-۶=۰\xrightarrow{\text{تجزیه}}(t-۶)(t+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۶\Rightarrow x^۲=۶\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm\sqrt{۶}\\ t=-۱\Rightarrow x^۲=-۱\Rightarrow\text{نمی‌توان از }(-۱)\text{ جذر گرفت}\end{cases}$$

ب) عبارت $(x-1)$ دو بار تکرار شده، پس نام آن را t می‌گذاریم:

$$t^2+2\sqrt{3}t-6=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(2\sqrt{3})^2-4(1)(-6)$$

$$=12+24=36 \Rightarrow t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{36}}{2(1)}$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}\pm 6}{2}=\frac{\cancel{2}(-\sqrt{3}\pm 3)}{\cancel{2}}=-\sqrt{3}\pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=-\sqrt{3}+3 \Rightarrow x=4-\sqrt{3} \\ x-1=-\sqrt{3}-3 \Rightarrow x=-2-\sqrt{3} \end{cases}$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه۲

در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ با فرض آن‌که $\Delta>0$ است، مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) به صورت زیر خواهد بود:

$$S=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

اثبات: می‌دانیم اگر $\Delta>0$ باشد، ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$$\boxed{x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$S=x'+x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=x'\cdot x''=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

نکته: در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر a و c مختلف‌العلامت باشند معادله حتماً دو ریشهٔ متمایز دارد؛ زیرا در رابطهٔ $\Delta=b^2-4ac$ مقدار $a\cdot c$ منفی می‌شود؛ پس Δ مثبت خواهد بود. هم‌چنین ریشه‌های معادله، مختلف‌العلامت هستند زیرا $P=x'\cdot x''=\frac{c}{a}$ ولی $\frac{c}{a}$ منفی است؛ پس چون ضرب ریشه‌ها منفی شده است، یکی مثبت و دیگری منفی است.

مثال: با توجه به معادلهٔ $x^2+5x-3=0$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

ب) بدون حل معادله، بگویید علامت ریشه‌ها چگونه است؟

حل: الف) a و c علامت‌های مختلف دارند، لذا $\Delta>0$ است و معادله حتماً دو ریشهٔ متمایز دارد. حال S و P را محاسبه می‌کنیم:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{1}=-5$$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{-3}{1}=-3$$

ب) علامت ریشه‌ها مختلف است (یکی مثبت و دیگری منفی)، چون a و c مختلف‌العلامت هستند.

تشکیل معادلهٔ درجه دوم با داشتن ریشه‌ها

اگر ریشه‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم α و β باشند، خودِ آن معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2\underbrace{-\beta x-\alpha x}_{\text{فاکتورگیری}}+\alpha\beta=0$$

$$\Rightarrow x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}x+\underbrace{\alpha\beta}_{P}=0 \Rightarrow \boxed{x^2-Sx+P=0}$$

پس اگر α و β داده شوند $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\cdot\beta$ را پیدا کرده و آن‌ها را در فرمول $x^2-Sx+P=0$ قرار می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{1\pm\sqrt{5}}{3}$ باشد.

حل:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{3}+\frac{1-\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{3} \\ P=\alpha\beta=(\frac{1+\sqrt{5}}{3})(\frac{1-\sqrt{5}}{3})=\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{9}=\frac{1-5}{9}=\frac{-4}{9} \end{cases}$$

معادلهٔ مطلوب: $\xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}=0$

ماکزیمم و مینیمم سهمی

می‌دانیم طول رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ یعنی نقطهٔ S از رابطهٔ $x_S=\frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید. حال اگر این عدد را به جای xهای معادلهٔ سهمی قرار دهیم مقدار y_S به دست می‌آید که همان مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی است (اگر $a>0$ باشد مینیمم و اگر $a<0$ باشد ماکزیمم است). ضمناً مستقیماً می‌توانیم مقدار ماکزیمم یا مینیمم را از رابطهٔ $y=\frac{-\Delta}{4a}$ به دست آوریم.

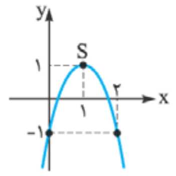
مثال: **بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع $f(x)=-2x^2+4x-1$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.**

حل: $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-2)}=1 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{در معادلهٔ } f(x)} y_S=-2(1)^2+4(1)-1=1$

$\Rightarrow S(1,1)$

x	0	1	2
y	−1	1	−1

$\xrightarrow{a<0}$



بهینه‌سازی

یعنی ماکزیمم‌کردن مقدار یک عبارت درجه‌دوم. برای این منظور، عبارتی را که می‌خواهیم ماکزیمم شود فقط برحسب یک متغیر می‌نویسیم؛ سپس از فرمول $\left(\text{مقدار متغیر}=\frac{-b}{2a}\right)$ استفاده می‌کنیم.

مثال: **اگر رابطهٔ $2x+y=20$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری بیابید که عبارت $5xy$ ماکزیمم (حداکثر) شود؟ سپس مقدار ماکزیمم را به دست آورید.**

حل: از رابطهٔ $2x+y=20$ به دلخواه x یا y را برحسب دیگری به دست می‌آوریم و در عبارت $5xy$ قرار می‌دهیم تا این عبارت فقط شامل یک متغیر شود:

$$2x+y=20 \Rightarrow y=-2x+20$$

عبارت اصلی $=5xy=5x(-2x+20)=-10x^2+100x$

$$\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-100}{2(-10)}=5$$

$$y=-2x+20 \xrightarrow{x=5} y=-2(5)+20=10$$

ماکزیمم عبارت اصلی $=5xy=5\times5\times10=250$

البته اگر $x=5$ را در $(-10x^2+100x)$ هم قرار دهیم، باز هم به جواب ۲۵۰ خواهیم رسید.

صفرهای تابع درجه دوم

منظور از صفرهای تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ همان ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد. ضمناً می‌دانید که این ریشه‌ها محل برخورد سهمی با محور xها را نشان می‌دهند، در شکل روبه‌رو، α و β صفرهای تابع f هستند.